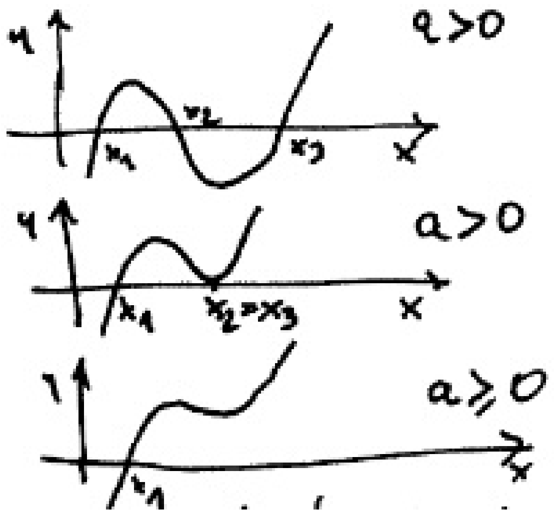
Funkcje jednej zmiennej

1. Funkcja liniowa $y = ax + b$, $Ax + By + C = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.
-jest rosnąca gdy $a > 0$, wtedy miejsce zerowe jest równe $x = -\frac{b}{a}$
-jest malejąca gdy $a < 0$, wtedy miejsce zerowe jest równe $x = -\frac{b}{a}$ oraz punkt przecięcia z osią OY jest równy $y = b$.

2. Funkcja kwardatowa $y = ax^2 + bx + c$
$\Delta$, wzory na pierwiastki, usytuowanie zależne od $\Delta$ i $a$, rozkład na czynniki:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ gdy $\Delta > 0$
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ gdy $\Delta = 0$

3. Wielomian trzeciego stopnia $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gdzie $a \neq 0$




Gdy $a > 0$ i wykres jak na górnej części rysunku, to:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Gdy $a > 0$ i wykres jak na środkowej części rysunku, to:

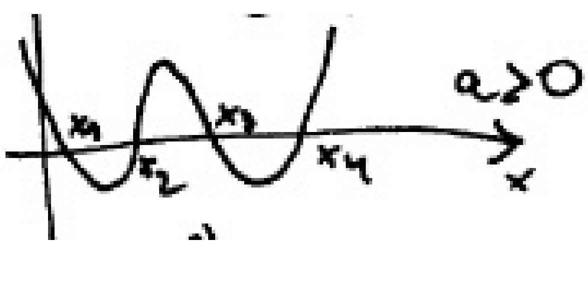
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)^2$$

Gdy $a \geqslant 0$, i wykres jak na dolnej części rysunku, to:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x^2 + ex + f)$$

gdzie $\Delta = e^2 - 4f$ jest mniejsza od zera.

4. Wielomian czwartego stopnia $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

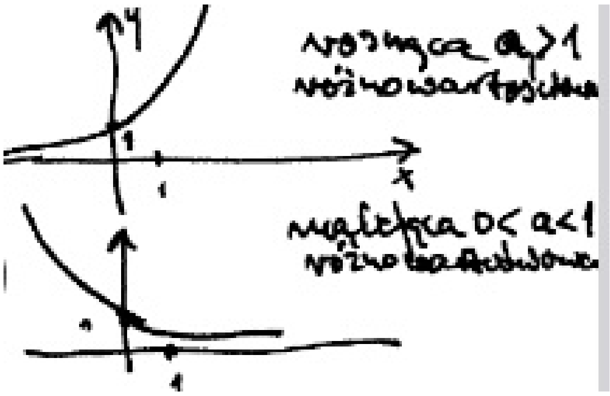



Powyżej jeden z możliwych wykresów wielomianu czwartego stopnia (gdy są cztery różne pierwiastki rzeczywiste.

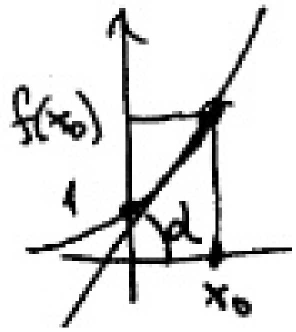
Ważne wzory:

$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2, \qquad (a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$
$(a-x)^3 = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

5. Funkcja wykładnicza $y = a^x$, gdzie $a > 0$




Gdy $a = 1$ otrzymuje się funkcję stałą $y = 1$
Jedną z podstaw w funkcji wykładniczej może być wartość $e = 2,718281828$ nazywana podstawą logarytmów naturalnych lub liczbą Eulera lub Nepera.




$e^{x_0} = f(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$
Wniosek
$(e^x)' = e^x$

Własności funkcji wykładniczej

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

6. Funkcja logarytmiczna $y = \log_a x$ $\qquad a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$

Definicja
Logarytmem przy podstawie $a$ z liczby $x$ nazywamy taką liczbę $b$, że $a^b = x$

$$\log_a x = b \iff a^b = x$$

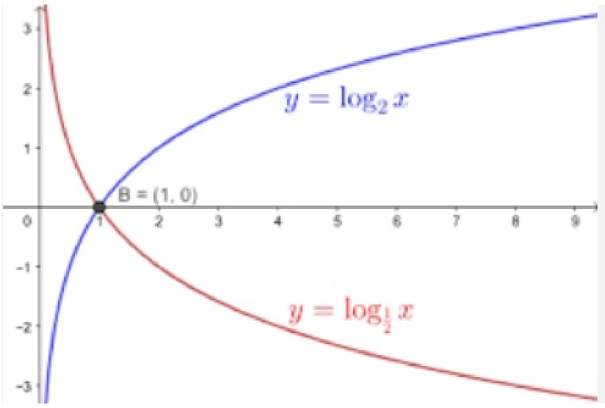
Ważne podstawy logarytmów:

$a = 10$, wtedy logarytm nazywamy dziesiętnym i oznaczamy jako log (nie piszemy podstawy).

Mamy $\log_{10} 10 = \log 10 = 1, \quad \log 100 = 2, \quad \log 1000 = 3$ itd.

Jeśli podstawa jest równa $e$, to logarytm nazywamy logarytmem naturalnym. Wtedy używamy symbolu ln także nie pisząc podstawy.
Mamy więc $\ln e = 1, \quad \ln e^2 = 2$ itd.

Własności logarytmów $\qquad x, y > 0$
1. $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$
2. $\log_a x^y = y \log_a x$
3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
4. $\log_a a^x = x$
5. $a^{\log_a b} = b$
6. $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$ (Wzór na zmianę podstawy logarytmu)
7. $\log_{a^b} c = \frac{1}{b} \log_a c$




Jeśli podstawa logarytmu jest większa od 1, to logarytm jest funkcją rosnącą. Jeśli podstawa logarytmu jest liczbą z przedziału $(0, 1)$, to logarytm jest funkcją malejącą. Wykres logarytmu przecina się z osią Ox w punkcie 1. Oś Oy jest asymptotą wykresu funkcji logarytmicznej.

Symbole matematyczne potrzebne w dalszej części wykładu

$\vee$ operator logiczny "lub"
$\wedge$ operator logiczny "i"
$p \Rightarrow q$ (lub $p \rightarrow q$) implikacja (z $p$ wynika $q$)
$p \Leftrightarrow q$ oznacza że $p$ jest równoważne $q$
$\bigwedge_{x \in A}$ oznacza "dla każdego $x$ należącego do A"
$\bigvee_{x \in B}$ oznacza "istnieje takie $x$ należące do B"

## Funkcje monotoniczne

1. Funkcja $y = f(x)$ jest rosnąca $\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{x_1<x_2} f(x_1) < f(x_2)$
2. Funkcja $y = f(x)$ jest niemalejąca $\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{x_1\leqslant x_2} f(x_1) \leqslant f(x_2)$
3. Funkcja $y = f(x)$ jest malejąca $\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{x_1<x_2} f(x_1) > f(x_2)$
4. Funkcja $y = f(x)$ jest nierosnąca $\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{x_1\leqslant x_2} f(x_1) \geqslant f(x_2)$

## Funkcja odwrotna

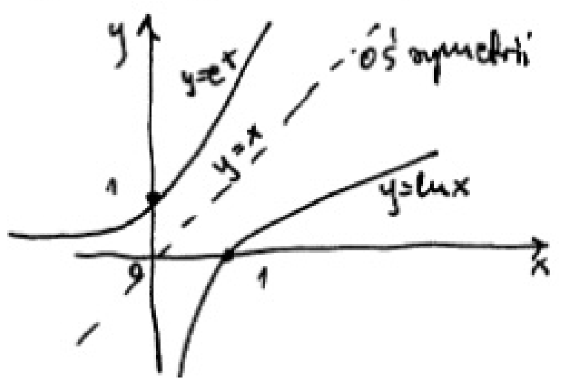
Definicja

Niech $y = f(x)$ będzie funkcją rosnącą lub malejącą (ściśle monotoniczną). Funkcja $g(x)$ jest funkcją odwrotną do funkcji $y = f(x)$ jeśli

$$\bigwedge_x f(g(x)) = g(f(x)) = x$$

Przykład

Jeśli $y = e^x$, to funkcją odwrotną jest $y = \ln x$.




## Różnowartościowość funkcji

Definicja

Funkcja $y = f(x)$ jest różnowartościowa $\Leftrightarrow \bigwedge_{x_1,x_2} x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
Równoważnie można stwierdzić, że $y = f(x)$ jest różnowartościowa $\Leftrightarrow \bigwedge_{x_1,x_2} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

## Dziedzina funkcji

Definicja

Dziedziną funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy zbiór $\{x \in \mathbb{R};\ \bigvee_{y\in\mathbb{R}}\ y = f(x)\}$

Przykłady

1. Niech $y = \sqrt{x-2}$. Aby określić dziedzinę trzeba zauważyć, że musi być $x - 2 \geqslant 0$ czyli $x \geqslant 2$. Zatem dziedzinę tej funkcji stanowi zbiór liczb rzeczywistych $D = [2, \infty)$

2. Niech $y = \ln(x - 1)$. Ponieważ musi być $x - 1 > 0$ czyli $x > 1$ więc dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych $D = (1, \infty)$

3. Niech $y = \log_x(3-x)$. Ponieważ muszą zachodzić warunki: $x \neq 1$ i $x > 0$ i $3 - x > 0$ czyli $x < 3$, więc dziedziną funkcji jest zbiór $D = \{x;\ x \in (0,1) \cup (1,3)\}$ czyli zbiór $D = (0,1) \cup (1,3)$